Альтернативный набор постулатов геометрии

Виктор Агилар www.researchgate.net/profile/Victor_Aguilar4

РЕФЕРАТ

Примерно 2300 лет назад Евклид написал «Начала», в которых геометрия строится на пяти постулатах и нескольких «общих понятиях». Его система во многом была здравой, однако обоснование Предложения 4 о равенстве треугольников по двум сторонам и углу между ними через наложение по современным меркам считается недостаточным. В свете последних достижений общей алгебры несостоятельны также общие понятия Евклида.

В 1898 году Давид Гильберт опубликовал «Основания геометрии», где наложение вообще не упоминается, а равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними представлено как постулат. Гильберт сделал большой шаг вперед по сравнению с аксиоматикой Евклида, чего и следовало ожидать от математика, родившегося двумя тысячелетиями позднее. Однако равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними не вполне интуитивно; думается, что его все-таки следует обосновать более фундаментальными интуитивными постулатами. Кроме того, Гильберт смешивает геометрические постулаты с аксиомами общей алгебры, которые, по мнению автора данной работы, лучше рассматривать отдельно.

В 1932 году Джордж Биркгоф опубликовал «Набор постулатов геометрии на плоскости». Его постулаты были метрическими, т. е. предполагали, что любой длине, углу и площади можно ставить в соответствие действительные числа. Это смелое допущение. Если теорему о подобии треугольников принять за постулат (а вместе с ней и теорему о пересекающей прямой), то всякая теорема будет простым следствием из этих смелых допущений. К тому же, хотя сам Биркгоф этого не хотел, его последователи часто ставят в соответствие длинам и углам действительные числа, а потом забывают, что они обозначают, и складывают их между собой. Однако суммы длины и угла не бывает.

Данная работа имеет целью предложить новый набор постулатов геометрии и определить необходимый минимум аксиом общей алгебры. Основной упор делается на то, чтобы принимать в качестве интуитивных только такие пространственные соотношения, которые без объяснений понятны маленьким детям; их родители всего лишь дают названия идеям, которые человек воспринимает на инстинктивном уровне. Предлагаем геометрам сравнить эти допущения с основаниями, которые используются в других учебниках. Данные постулаты и аксиомы лягут в основу учебника «Геометрия-до».

Ключевые слова: Международная математическая олимпиада, математические соревнования, участники математических кружков, геометрия

Постулаты Евклида и один дополнительный

Отрезок	Две точки однозначно определяют отрезок.
Треугольник	Три точки однозначно определяют треугольник.
Прямая	Отрезок однозначно определяет прямую.
Окружность	Центр и радиус однозначно определяют окружность.
Прямой угол	Все прямые углы равны между собой.
Параллельная прямая	Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

В постулатах используется формулировка «однозначно определяет», означающая, что фигура с указанными свойствами является единственной, если существует. Три стороны однозначно определяют треугольник, но он может не существовать, если одна из сторон слишком длинная; две стороны и угол, лежащий против одной из этих сторон, не дают однозначного определения треугольника. Отсутствие однозначного определения означает, что существует множество фигур с указанными свойствами; нужно больше информации. Джон Плейфер формулировал постулат о параллельности примерно так же, как я и Давид Гильберт. Можно доказать, что эти формулировки эквивалентны V постулату Евклида.

> *Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.*

Мы с Гильбертом сходны в том, что посчитали евклидов постулат громоздким и предпочли вариант Плейфера, а также отвергли действительные числа как не соответствующие нашим постулатам, но в остальном идем каждый своим путем. «Геометрия-до» похожа на геометрию Гильберта, но в то же время является уникальной и оперирует собственными постулатами.

У Евклида также было пять «общих понятий», которые расплывчато описывают то, что современные математики называют отношениями эквивалентности, отношениями линейного порядка и аддитивными группами.

Отношения эквивалентности и отношения линейного порядка

Отношение это оператор, R, который возвращает «истину» или «ложь» применительно к упорядоченной паре элементов данного множества. Например, если множество — целые числа, а отношение — равенство, то $5 = 5$ истина, а $5 = 4$ ложь. Отношения можно применять только к объектам, принадлежащим одному множеству. Например, утверждение $\overline{\mathrm{EF}} = \angle\mathrm{G}$ не истинно и не ложно; оно некорректно. Отношения можно характеризовать относительно четырех свойств. Ни одно отношение не может обладать всеми четырьмя, но некоторые обладают тремя.

Транзитивность	если $a\ R\ b$ и $b\ R\ c$, то $a\ R\ c$
Рефлексивность	$a\ R\ a$
Симметричность	если $a\ R\ b$, то $b\ R\ a$
Антисимметричность	если $a\ R\ b$ и $b\ R\ a$, то $a = b$

Отношение, обладающее свойствами транзитивности, рефлексивности и симметричности, называется отношением эквивалентности. В геометрии рассматриваются следующие отношения эквивалентности: равенство «$=$», применимое к отрезкам, углам и площадям; конгруэнтность «$\cong$», применимая к треугольникам; подобие «$\sim$», применимое к треугольникам; и параллельность «$\parallel$», применимая к прямым. $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{GH}$ означает, что $\overleftrightarrow{EF}$ и $\overleftrightarrow{GH}$ не пересекаются.

Поскольку отрезки определяются исключительно своей длиной, $\overline{EF} = \overline{GH}$ означает, что $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ одной длины. Это не значит, что они являются одним и тем же отрезком; они могут иметь разное расположение. Поскольку длина одинакова вне зависимости от направления, всегда верно, что $\overline{EF} = \overline{FE}$. Однако треугольники определяются не одной величиной, а шестью. Вершины треугольников упорядочены, чтобы было видно, какие из них равны между собой. $\overline{EFG} \cong \overline{JKL}$ означает, что $\overline{EF} = \overline{JK}$, $\overline{FG} = \overline{KL}$, $\overline{GE} = \overline{LJ}$, $\angle E = \angle J$, $\angle F = \angle K$ и $\angle G = \angle L$. Будьте внимательны! Запись вершин треугольника в неправильном порядке одна из наиболее часто встречающихся ошибок, допускаемых начинающими геометрами, и для доказательства она всегда фатальна.

Четырехугольник это объединение двух треугольников; конгруэнтность или подобие сохраняется тогда и только тогда, когда обе пары треугольников конгруэнтны или подобны. Если $\overline{EFG} \cong \overline{JKL}$ и $\overline{EHG} \cong \overline{JML}$, то $\overline{EFGH} \cong \overline{JKLM}$. Аналогично, если $\overline{EFG} \sim \overline{JKL}$ и $\overline{EHG} \sim \overline{JML}$, то $\overline{EFGH} \sim \overline{JKLM}$. Подобие определяется как равенство всех соответствующих углов двух треугольников, следовательно $\overline{EFG} \sim \overline{JKL}$ и $\overline{EHG} \sim \overline{JML}$ означает, что шесть пар соответствующих углов равны. Это больше, чем просто сказать, что четыре соответствующих внутренних угла $\overline{EFGH}$ и $\overline{JKLM}$ равны; таким образом, неверно, что для доказательства подобия $\overline{EFGH} \sim \overline{JKLM}$ достаточно доказать равенство этих четырех углов. В качестве контрпримера можно привести квадрат и прямоугольник; у обеих фигур все углы прямые, но они не подобны друг другу. Это одна из причин, по которой мы не определяем четырехугольник как фигуру с четырьмя сторонами. Это пустое определение, из-за которого многие новички приходят к выводу, что квадрат и прямоугольник подобны. Кроме того, наше определение делает четырехугольники продолжением треугольников; в американских школах их проходят в рамках семестровых курсов, которые можно брать в любом порядке.

Отношение, обладающее транзитивностью, рефлексивностью и симметричностью, является отношением эквивалентности, и таких в геометрии четыре: равенство, конгруэнтность, подобие и параллельность. Антисимметричные отношения можно определить только после того, как мы дадим определение равенству, поскольку равенство фигурирует в определении этого свойства. Отношение, обладающее свойствами транзитивности, рефлексивности и антисимметричности, называется отношением порядка. Геометры рассматривают всего одного такое отношение: меньше или равно «$\leq$». Отношение порядка является линейным, если всегда верно, что $a \leq b$ или $b \leq a$. Множество, на котором одновременно задано отношение эквивалентности, «$=$», и отношение линейного порядка, «$\leq$», называется величиной. Существуют отношения порядка, которые не являются линейными, например, частичные порядки, но в геометрии они не используются. Меньше «$<$» означает «$\leq$», но не «$=$». Это отношение невозможно определить, не дав определения отношениям $\leq$ и $=$.

Обратите внимание: наше определение величины не подразумевает, что действительные числа можно ставить в соответствие длинам, углам и площадям; только что отношения «$=$» и «$\leq$» существуют и обладают необходимыми свойствами. При этом оно подразумевает единственность величин, о которой говорится в приводимой далее аксиоме воспроизводимости. Равные величины представляют собой отношение эквивалентности, которое можно воспроизвести где угодно; то есть циркули не падают, если их отрывают от бумаги, но становятся похожими на мерную веревку. Падающие циркули были бы подобны землемерам, у которых веревка, проведенная по дуге, превращается в дым, стоит только парню в центре отойти на шаг. Поскольку ошибки накапливаются, невозможно отмечать каждый фут – погрешность в четверть дюйма на каждую такую веху через сто ярдов обернется ошибкой в несколько футов – плюс усадка или удлинение из-за колебаний температуры и влажности. Вот почему вместо рулетки мы пользуемся рейкой; однако мысль о том, что циркуль нельзя оторвать от бумаги, чтобы отложить длину в другом месте, превращает геометрию из науки в салонную игру.

Класс эквивалентности представляет собой множество объектов, которые равны, конгруэнтны, подобны или параллельны друг другу. Классы эквивалентности можно определять относительно существующего класса эквивалентности. Например, если класс эквивалентности определен как все углы, равные данному углу, то все углы, дополнительные по отношению к любому элементу этого класса, равны между собой; то есть, они образуют собственный класс эквивалентности. Все углы, смежные по отношению к любому элементу этого класса, также равны между собой. Если класс эквивалентности определен как все прямые, параллельные данной прямой, то все прямые, перпендикулярные любому элементу этого класса, параллельны друг другу. Все окружности с радиусом, равным любому элементу класса эквивалентности, состоящего из равных отрезков, представляют собой класс эквивалентности.

Эквивалентность также может относиться к утверждениям; два утверждения эквивалентны, когда одно можно доказать, если принять за истину другое, притом в любом порядке. Например, пятый постулат Евклида и постулат Плейфера эквивалентны, поскольку, если принять за истину любой из них, можно доказать, что оставшийся также истинен. Эквивалентность теорем можно выразить, разделив их фразой «тогда и только тогда», сокращенно «тит». Доказательство в другом направлении называется обратным; то есть, если из p следует q, то обратным будет, что из q следует p. Если p и q эквивалентны, оба вывода истинны.

Доказательство от противного, когда имеется только одна альтернатива, невозможность которой нужно доказать, называется дихотомией. При трихотомии (например, равенство треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам) имеется три альтернативы. Одна величина может быть либо меньше, либо равна, либо больше другой величины, и только один из этих трех вариантов является желательным; таким образом, доказав, что другие два невозможны, мы будем знать, что именно при этом одном теорема истинна.

Аддитивные группы

Мы определяем аддитивную группу как множество и операцию (сложение), обладающие следующими свойствами:

Ассоциативность	$(a+b)+c=a+(b+c)$
Коммутативность	$a+b=b+a$
Существование и единственность нейтрального элемента	$a+0=a=0+a$
Существование обратных элементов (нейтральный элемент обратен самому себе)	$a+(-a)=\ 0\ =(-a)+a$

Существуют величины, которые не являются аддитивными группами, например, экономическая ценность. Если есть выбор между a и b, человек всегда может предпочесть одно другому. Но, поскольку a может заменять или дополнять собой b, они не являются независимыми, как геометрические величины. Кроме того, существуют аддитивные группы, которые не могут быть упорядочены, например, матрицы. Матрицы одинаковой размерности представляют собой аддитивную группу, но ни для какой пары из этой группы нельзя сказать, что $a \leq b$.

На первом занятии я предлагаю студентам оглянуться на восемь-десять лет назад и вспомнить себя маленькими детьми, которые умели только складывать и вычитать, а к умножению и делению относились еще с опаской. Я обещаю, что геометрия будет для них возвращением в первый класс. Склеивать отрезки концом к концу или углы стороной к стороне не сложнее, чем решать первые школьные задачки о конфетах, которые кладут в вазу или убирают из вазы со сладостями. Насколько это просто?

Аксиома воспроизводимости

При заданных $\overline{EF}$ и $\overrightarrow{JK}$ существует единственная точка L на $\overrightarrow{JK}$, такая что $\overline{EF}=\overline{JL}$.

При заданных $\angle EFG$ и $\overrightarrow{KJ}$ существуют лучи $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KL''}$, такие что $\angle EFG=\angle JKL=\angle JKL''$.

Аксиома внутреннего отрезка

Если M лежит между E и F, то $\overline{EM}<\overline{EF}$ и $\overline{MF}<\overline{EF}$ и $\overline{EM}+\overline{MF}=\overline{EF}$.

Аксиома внутреннего угла

Если P лежит внутри $\angle EFG$, то $\angle EFP < \angle EFG$ и $\angle PFG < \angle EFG$ и $\angle EFP + \angle PFG = \angle EFG$.

Аксиома Паша

Если прямая проходит между двумя вершинами треугольника и не проходит через третью вершину, то она проходит между третьей вершиной и одной из первых двух.

Лежать между E и F означает лежать на отрезке, который они определяют, $\overline{EF}$, но не на концах этого отрезка. Лежать внутри $\angle EFG$ означает лежать между точками на $\overrightarrow{FE}$ и на $\overrightarrow{FG}$, причем ни одна из этих точек не является точкой F. Всем людям инстинктивно понятно, как это, когда точка лежит между двумя другими точками и — в случае аксиомы Паша — что такое непрерывный отрезок, то есть отрезок, не имеющей разрывов, через которые мог бы проскочить другой отрезок. Треугольники и четырехугольники по нашему определению выпуклые: отрезок, соединяющий две точки, которые являются внутренними по отношению к двум сторонам, лежит внутри фигуры. Это означает, что треугольники и четырехугольники не могут быть вогнутыми или вырожденными. Внутренние углы больше нуля и меньше $180°$, поэтому треугольники не бывают отрезками, а четырехугольники не бывают треугольниками или невыпуклыми дельтоидами.

«Геометрия-до» не дает определения терминам «между», «внутри», «плоскость», «точка», «кратчайший путь» и «прямой». Это понятия, которые нет необходимости объяснять детям; родители просто подбирают слова для идей, которые уже существуют в голове ребенка. Площадь определяется как количество квадратов, которые заполняют треугольник или объединение треугольников. Подобно древним грекам, мы не имеем строгого определения пределов и полагаемся на интуитивное восприятие; пшеничные колоски бесконечно малы по сравнению с полями, поэтому взвешивать пшеницу это почти как вычислять предел. Так же и маленький ребенок способен без объяснений понять, что такое площадь. Определять площадь как произведение сторон прямоугольника мы начнем со второго тома, который называется «Геометрия с умножением». Это определение площади не будет интуитивно понятно детям, которые ничего не знают об умножении. Поэтому, собственно, мы и разделяем наш учебник на два тома.

Градусная мера угла не будет определена ни в первом, ни во втором томе, поскольку это уже тригонометрия.

Теорема о неравенстве треугольника

Любая сторона треугольника короче суммы двух других сторон.

В Древней Греции Эпикур насмехался над Евклидом за то, что тот доказал теорему, очевидную даже ослу, умеющему находить кратчайший путь к стогу сена. В самом деле, из нашего определения прямо следует, что отрезок это все точки вдоль кратчайшего пути между двумя точками. Обладатели желтых поясов могут размяться, доказав это при помощи теорем о большем угле и большей стороне, но мы уважим и Эпикура, и Евклида:

поставим утверждение о неравенстве треугольника в один ряд с аксиомами, назвав его при этом теоремой.

Оснований, которые мы объяснили выше, достаточно до уровня синего пояса включительно. Начальные главы научат читателей делить отрезок на две, три и четыре равные части и умножать его на небольшие натуральные числа, используя многократное сложение. Таких многократных сложений понадобится не более четырех — для построения египетского треугольника, или прямоугольного треугольника с соотношением сторон 3:4:5. Единственное исключение мы сделаем, когда вскользь упомянем прямоугольный треугольник с соотношением сторон 5:12:13, который водопроводчики используют при установке колен на 22.5°.

Начинающим, особенно строителям, которые хотят освоить геометрию белого пояса, советуем не слишком зацикливаться на этих, несколько абстрактных, основаниях. С другой стороны, важно заложить для нашей науки прочный фундамент. Поэтому рекомендуем читателю вернуться к разделу об основаниях, когда он получит оранжевый пояс и будет лучше ориентироваться в абстрактных рассуждениях. (А также успеет познакомиться с упомянутым в первом абзаце признаком равенства треугольников по трем сторонам и ситуацией, когда у треугольников равны две стороны и угол, лежащий против одной из этих сторон). Остановившиеся на более низких уровнях — строители — к этому времени отсеются. Обладатели красного пояса должны уметь обучать начинающих, чтобы освободить от этой обязанности тех, кто заработал черный. Поэтому для студентов красного уровня предусмотрены материалы по педагогике; им также рекомендуется еще раз перечитать этот основополагающий раздел, и притом вдумчиво.

На уровне черного пояса студенты познакомятся с подобием и докажут теорему подобия треугольников. Подобие открывает в геометрии совершенно новый мир! В частности, от деления отрезков на две и три равные части обладатели черного пояса перейдут к откладыванию отрезков, длина которых относительно заданной единицы будет равняться любому рациональному числу. Но для этого нужна еще одна аксиома. Мы уже говорили, что множество, на котором одновременно задано отношение эквивалентности, «$=$», и отношение линейного порядка, «$\leq$», называется величиной. Но для того чтобы откладывать отрезки, длина которых относительно заданной единицы равняется любому рациональному числу, длина должна быть еще и архимедовой.

Аксиома Архимеда

Для любых двух отрезков $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ существует натуральное число n, такое что $n\overline{EF} > \overline{GH}$.

Это может показаться тривиальным, однако поля Галуа (конечные поля) не являются архимедовыми. Каждый школьник знает, что Архимед утверждал, будто бы при наличии достаточно длинного рычага и точки опоры он сможет перевернуть мир. Как правило, учителя не дают ясного ответа, почему это важно, ведь такой точки опоры не существует, и Архимед, судя по всему, не принимает во внимание силу гравитационного притяжения. А говорил Архимед вот о чем: если бы такая точка существовала, и за ней стояла сильная гравитация, чтобы уравновесить его массу с массой Земли, понадобился бы рычаг, длинное плече которого было бы в $6{\times}10^{22}$ больше короткого. Будь эта точка в одном метре от Земли, Архимед очутился бы в галактике Андромеды, если бы встал на другой конец такого длинного рычага. $6{\times}10^{22}$ большое число, но оно существует.

Выше мы сказали, что неопределенные термины это понятия, которые не нужно объяснять ребенку; взрослые просто подбирают слова для идей, которые уже существуют в голове ребенка. Но, определяя натуральные числа как $1, 2, 3, \cdots$ мы тоже действуем интуитивно, почти как дети, которые считают по пальцам. Когда я поехал со своей четырехлетней дочкой в другой город, она удивилась, увидев за рулем автобуса незнакомого водителя. Девочка думала, что несколько десятков человек, которых она встречала в родном городе, это все люди на свете; иначе говоря, она считала, что натуральные числа это поле Галуа по модулю 47. Мы думаем, что $6{\times}10^{22}$ существует, потому что счетные бесконечные поля непротиворечивы; но большие поля Галуа тоже непротиворечивы. Из-за этой аксиомы в Америке принято говорить детям, что двух одинаковых снежинок не бывает. Маленькие дети не воспринимают аксиому Архимеда на интуитивном уровне, и это одна из причин, по которым изучение подобия откладывается до черного пояса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Birkhoff, George. 1932. “A Set of Postulates for Plane Geometry, Based on Scale and Protractor” ***Annals of Mathematics***. 33 (2): 329-345

Euclid. [c. 300 B.C.] 1926. ***The Elements***. T. L. Heath trans. Santa Fe, NM: Green Lion Press

Hilbert, David. 1899. ***Foundations of Geometry***. E. J. Townsend trans. University of Göttingen