

# Quantum model for price forecasting in Financial Markets

—————(bilingual english-spanish edition)—————

## Modelo cuántico para la predicción de precios en mercados financieros

J. L. Subias\*

*Departamento de Ingeniería de Diseño y Fabricación, Universidad de Zaragoza,  
C/Maria de Luna 3, 50018-Zaragoza, Spain*

(Dated: October 22, 2018)

### Abstract

The present paper describes a practical example in which the probability distribution of the prices of a stock market blue chip is calculated as the wave function of a quantum particle confined in a potential well. This model may naturally explain the operation of several empirical rules used by technical analysts. Models based on the movement of a Brownian particle do not account for fundamental aspects of financial markets. This is due to the fact that the Brownian particle is a classical particle, while stock market prices behave more like quantum particles. When a classical particle meets an obstacle or a potential barrier, it may either bounce or overcome the obstacle, yet not both at a time. Only a quantum particle can simultaneously reflect and transmit itself on a potential barrier. This is precisely what prices in a stock market imitate when they find a resistance level: they partially bounce against and partially overcome it. This can only be explained by admitting that prices behave as quantum rather than as classic particles. The proposed quantum model finds natural justification not only for the aforementioned facts but also for other empirically well-known facts such as sudden changes in volatility, non-Gaussian distribution in prices, among others.

## Resumen

En el presente artículo se describe un ejemplo práctico en el que calculamos la distribución de probabilidad de las cotizaciones de un blue-chip de un mercado bursátil como función de onda de una partícula cuántica confinada en un pozo de potencial. Este modelo podría explicar de forma natural el porqué de varias reglas empíricas usadas por los analistas técnicos. Los modelos basados en el movimiento de una partícula browniana dejan inexplicados aspectos fundamentales de los mercados financieros. Ello se debe a que la partícula browniana es una partícula clásica, mientras que las cotizaciones de los mercados se comportan más bien como partículas cuánticas. Cuando una partícula clásica se encuentra con un obstáculo o barrera de potencial, puede rebotar o superar el obstáculo, pero no puede hacer ambas cosas a la vez. Solo si la partícula es cuántica puede reflejarse y transmitirse simultáneamente ante una barrera de potencial. Eso es precisamente lo que remedan los precios en un mercado cuando encuentran un nivel de resistencia: en parte rebotan, en parte superan el nivel de resistencia. Esto solo es explicable admitiendo que los precios se comportan como partículas cuánticas más bien que clásicas. En el modelo cuántico que proponemos encuentran justificación natural no solo los hechos anteriores, sino otros empíricamente bien conocidos, como los cambios bruscos de volatilidad, la distribución no gaussiana de los precios y otros.

PACS numbers: 89.65.Gh, 05.90.+m, 87.23.Ge

---

\* e-mail for correspondence to the author:

jsubias@unizar.es

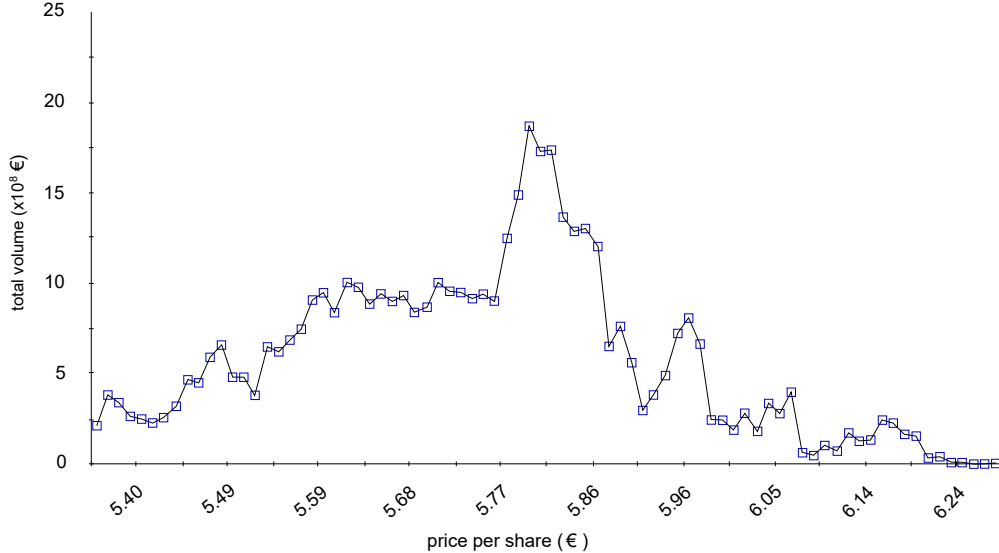


FIG. 1. Potential field to which the particle is subjected, as calculated previously by statistical physics methods

## I. INTRODUCTION

Models extracted from statistical physics to describe financial market dynamics (Brownian models, pseudo Ising, etc.[1–3]) have been followed by important works which make use of quantum mechanics to explain certain aspects neglected in previous works[4]. Quantum models have been proposed to consider the normative price-fluctuation limit imposed in several markets, which is equivalent to considering as a quantum system a particle in an infinite potential well or a harmonic oscillator with two extreme potential values[5, 6]. Difficulty in these models lies in the estimation of the Hamiltonian of the stock market, which depends on such diverse factors as the economic situation, economic policies, market information, investor psychology, etc. The present model is aimed at overcoming this difficulty.

## II. MODEL DESCRIPTION

Let us assume that the stock market price of a blue chip behaves as a quantum particle with no spin confined in an infinite potential well. The bottom of the well forms potential  $V(\mathbf{p})$ , which depends on recent past(see Fig. 1). The estimation of potential  $V(\mathbf{p})$  is a statistical physics problem which shall be tackled in a forthcoming paper.

The wave function which describes the state of the particle shall be conceived as a function

$\Psi(\mathbf{p}, t)$  which depends on prices  $\mathbf{p}$  of the blue-chip shares and time  $t$ . In the space of states[7] and according to compact Dirac notation, we shall write:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad (1)$$

which indicates that the most general function  $|\Psi\rangle$  is a linear superposition of well-defined stationary wave functions, with complex coefficients  $c_n = \langle \phi_n | \Psi \rangle$ . Ket  $|\Psi\rangle$  would be biunivocally determined by the infinite set of  $c_n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ , this being its "price representation", which is formally analogous to representation  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$  (positions) in quantum mechanics. The probability distribution of the blue-chip prices would be the squared module of the wave function -i.e.,  $|\Psi(\mathbf{p}, t)|^2$ .

### A. The Hamiltonian of a blue chip in a financial market

In quantum mechanics there are no variables but observables, which are represented by Hermitian operators in a Hilbert space (space of states). In a financial market, each Hermitian operator would be represented by a set of economic or financial variables. Therefore, the next step is setting an equivalence between quantum-mechanical and financial concepts. For the considered potential well, the Hamiltonian is:

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V, \quad (2)$$

As mentioned above, Potential  $V$  must be estimated by statistical physics procedures and, for the moment, let us assume it is known to us. Particle mass  $m$  shall be related to the average daily trading volume expressed in thousand Euro. If the position of the particle is related to blue-chip stock price  $\mathbf{p}$  in time  $t$ , consequently, linear momentum  $\mathbf{P}$  shall be related to the variation rate of this price throughout time.

### B. The Schrödinger equation

In this situation, the Schrödinger equation which rules the evolution of the particle would be, in its compact form:  $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ , and explicitly:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + V(\mathbf{p})\phi_n = E_n\phi_n, \quad (3)$$

which is the time-independent Schrödinger equation, where  $\phi_n$  is the well-defined energy stationary wave function  $E_n$ . The time-dependent Schrödinger equation in its compact expression would be:

$$H|\Psi(\mathbf{p}, t)\rangle = i\hbar^2 \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle, \quad (4)$$

And, explicitly:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \Psi + V(\mathbf{p})\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (5)$$

whose general solution is

$$\Psi(\mathbf{p}, t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}, \quad (6)$$

That is, the general solution  $\Psi(\mathbf{p}, t)$  is a linear combination of an infinite number of stationary wave functions  $\phi_n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ .

### C. Thermodynamic equilibrium and average energy

Assuming that the system is in equilibrium with a thermal bath at temperature  $T$ , the state of the system could be described by a statistical ensemble of stationary states  $|\phi_n\rangle$  with weighing coefficients proportional to  $\exp(-E_n/(KT))$ , where  $E_n$  is the energy in state  $|\phi_n\rangle$ ,  $K$  is the Boltzmann constant, and  $T$  is the equilibrium temperature. This mixture state can be characterized by the density matrix, which can be described in this case as:

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{\frac{-H}{KT}}, \quad (7)$$

where  $H$  is the Hamiltonian operator, and  $Z$  is the canonical partition function, shaped as:

$$Z = Tr\{e^{\frac{-H}{KT}}\}, \quad (8)$$

Or more explicitly:

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | e^{\frac{-H}{KT}} | \phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-E_n}{KT}}, \quad (9)$$

where  $E_n$  are the eigenvalues of Hamiltonian  $H$ . In the corresponding eigenvector base  $\{|\phi_n\rangle\}$  the matrix elements of the  $\rho$  density operator can be expressed as:

$$\rho_{nn} = \frac{1}{Z} \langle \phi_n | e^{\frac{-H}{KT}} | \phi_n \rangle = \frac{1}{Z} e^{\frac{-E_n}{KT}}, \quad (10)$$

$$\rho_{nm} = \langle \phi_n | e^{\frac{-H}{KT}} | \phi_m \rangle = \frac{1}{Z} e^{\frac{-E_n}{KT}} \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0, \quad (11)$$

Relationships (10), (11) mean that -in thermodynamic equilibrium- eigenstate populations exponentially decrease with energy as well as that  $\rho_{nm}$  coherence between eigenstates is zero.

1. *Two-level quantum-system approximation*

Using the  $\rho$  density matrix, average value  $\langle H \rangle$  can be calculated as:

$$\langle H \rangle = Tr(H\rho) = \frac{1}{Z}Tr(He^{\frac{-H}{KT}}), \quad (12)$$

Expanding this expression in eigenvector base  $\{\phi_n\}$  it can be seen that:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{\frac{-E_n}{KT}}, \quad (13)$$

At this point, we shall introduce a relevant simplification: empirical data show that -for the quantum particle- only the ground state and the first excited state are reachable, since the second and following excited states demand increasing energy levels which are unreachable for the particle. That is, the problem is reduced to a two-state (fundamental and first excited) system. This reduction is based on the fact that a stock price can suddenly pass from low to high volatility to then go back to its previous low volatility state. This fact has not been explained so far, being tackled only in *ad hoc* models. For this two-level system, the general equation (13) renders the following result:

$$\langle H \rangle = \frac{E_1 e^{\frac{-E_1}{KT}} + E_2 e^{\frac{-E_2}{KT}}}{e^{\frac{-E_1}{KT}} + e^{\frac{-E_2}{KT}}}, \quad (14)$$

$E_1, E_2$  being well-defined energy levels,  $K$  being the Boltzmann constant,  $T$  being absolute temperature. Fig. 2 is a graph as a function of  $T$  which shows that  $\langle H \rangle$  approaches to  $E_1$  when temperature  $T$  approaches to zero, and asymptotically to  $(E_1 + E_2)/2$  when  $T$  reaches high values.

The meaning of Fig. 2 is easy to understand: for  $T = 0$ , the system is in its ground state  $|\Psi_1\rangle$  of energy  $E_1$ . At high temperatures, the statistical mixture is formed by both levels  $E_1$  and  $E_2$  equally, and average  $\langle H \rangle$  approximates one half of the sum of  $E_1$  and  $E_2$ . Applying formulae (10), (11) the elements of the density matrix for the system of two energy levels are obtained:

$$\begin{aligned} \rho_{1,1} = \dots = \frac{e^{\frac{-E_1}{KT}}}{e^{\frac{-E_1}{KT}} + e^{\frac{-E_2}{KT}}}, & \quad \rho_{1,2} = \rho_{2,1} = 0 \\ \rho_{2,2} = \dots = \frac{e^{\frac{-E_2}{KT}}}{e^{\frac{-E_1}{KT}} + e^{\frac{-E_2}{KT}}} & \end{aligned} \quad (15)$$

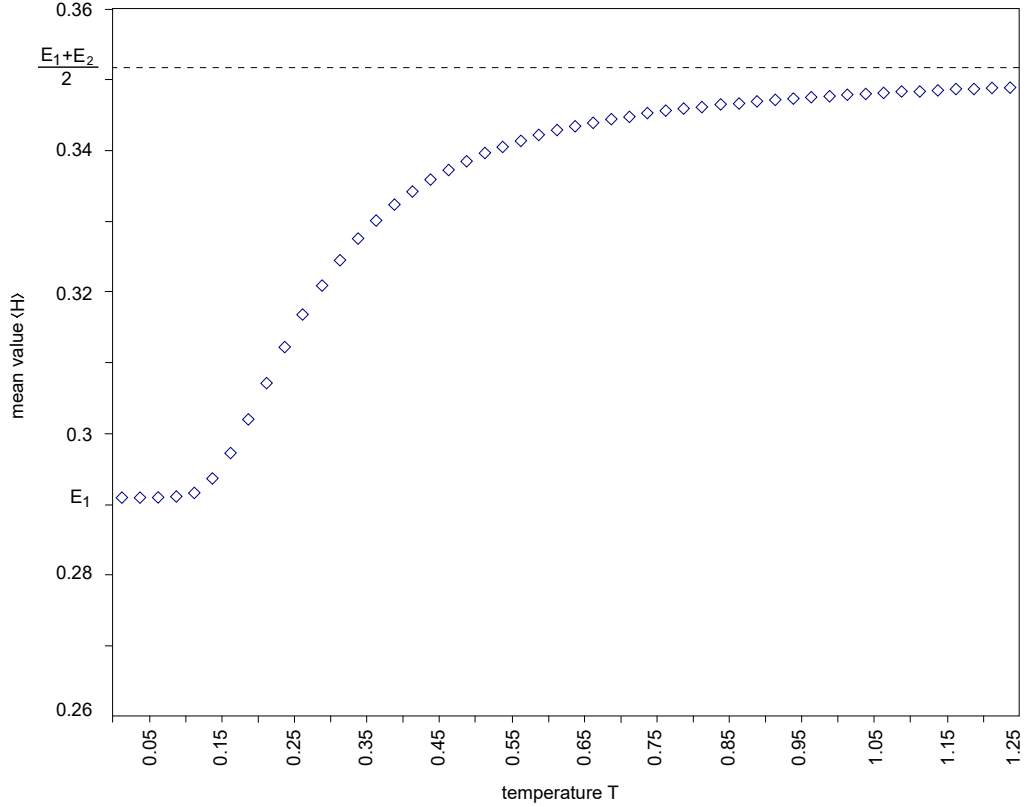


FIG. 2. Average value of Hamiltonian  $\langle H \rangle$  vs. absolute temperature  $T$  for a two-level  $E_1$ ,  $E_2$  quantum system

#### D. Market temperature

Assuming that prices  $\mathbf{p}$ , rates of change (returns)  $\mathbf{r}$ , and trading volumes  $\mathbf{v}$  play the roles of particle position, speed and mass, respectively, the uncertainty principle can be expressed as:

$$\Delta \mathbf{p} \Delta(\mathbf{v} \mathbf{r}) \geq \hbar/2, \quad (16)$$

formally being:  $\mathbf{v} \mathbf{r} = \text{momentum}$ , and  $\mathbf{r} = d\mathbf{p}/dt$ . Kinetic energy  $E_k$  averaged over the time would be:

$$\langle E_k \rangle = \left\langle \frac{(\mathbf{v} \mathbf{r})^2}{2\mathbf{v}} \right\rangle = \frac{1}{2} K T, \quad (17)$$

where  $K$  is the Boltzmann. Consequently, a coherent definition of temperature would be:

$$T = \frac{\langle \mathbf{v} \mathbf{r}^2 \rangle}{K}, \quad (18)$$

For further discussion on the concept of market temperature, see [8].

### E. Probability distribution of the observable *price*

Now, let us find probability  $\rho(\mathbf{p})d\mathbf{p}$  of finding a particle in a position  $\mathbf{p}$  located between  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ . When the particle is in stationary state  $|\phi_n\rangle$ , the corresponding probability density  $\rho_n(\mathbf{p})$  will be:

$$\rho_n(\mathbf{p}) = |\phi_n(\mathbf{p})|^2 = \langle \mathbf{p} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \mathbf{p} \rangle, \quad (19)$$

In thermodynamic equilibrium, particle state is described by a statistical ensemble of states  $|\phi_n\rangle$  with weighing coefficients  $(1/Z) \exp(-E_n/(KT))$ . Therefore, probability density in this case will be:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \sum_n \rho_n(\mathbf{p}) e^{-\frac{E_n}{KT}}, \quad (20)$$

That is, probability density  $\rho(\mathbf{p})$  can be defined as the weighed sum of densities  $\rho_n(\mathbf{p})$  corresponding to the diverse states  $|\phi_n\rangle$ . Let us see how the probability density defined in (20) is related to density matrix  $\rho$ . Combining (20) and (19) renders:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \sum_n \rho_n(\mathbf{p}) e^{-\frac{E_n}{KT}} \langle \mathbf{p} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \mathbf{p} \rangle, \quad (21)$$

Bearing in mind the closure relation for states  $|\phi_n\rangle$ , operator  $\exp(-H/(KT))$  can be rewritten in the following way:

$$e^{-\frac{H}{KT}} = e^{-\frac{H}{KT}} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \sum_n e^{-\frac{E_n}{KT}} |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (22)$$

Combining (21) and (22):

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \langle \mathbf{p} | e^{-\frac{H}{KT}} | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} | \rho | \mathbf{p} \rangle, \quad (23)$$

Thus, it can be interpreted that  $\rho(\mathbf{p})$  is rho's diagonal element corresponding to ket  $|\mathbf{p}\rangle$ .

## III. STEP-BY-STEP DESCRIPTION OF A PRACTICAL CASE

Next, the probability distribution of the prices of a blue chip in Spanish IBEX 35 stock market shall be calculated -as well as the steps to follow shall be described.

### A. Setting up boundary conditions

First of all, the time period through which we want the obtained result to be valid (probability distribution) shall be set up. The walls of the well determine an infinite potential



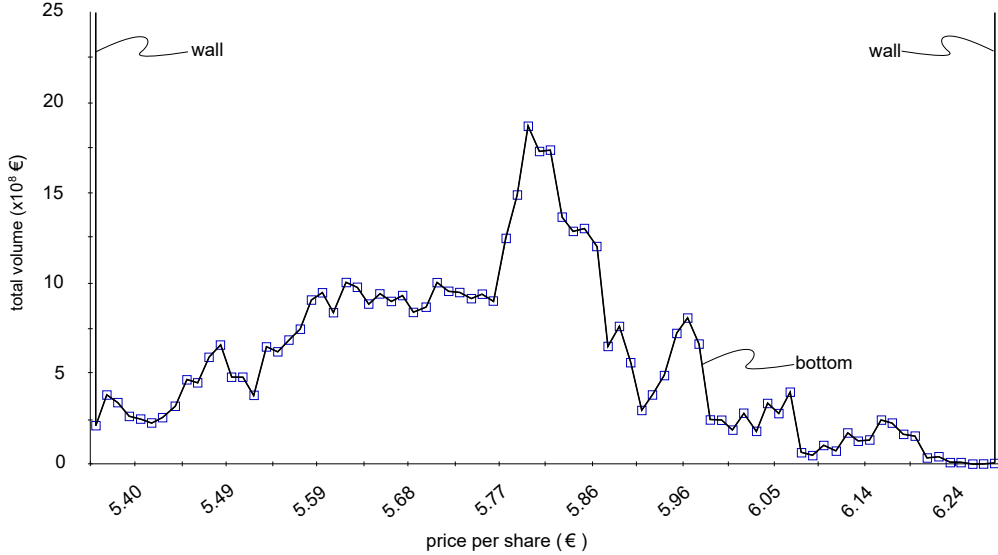


FIG. 3. The potential field, *a priori* calculated, shapes the bottom of the potential well in which the quantum particle is confined

-i.e., the quantum particle cannot flee the well in which it is confined. This assumption is based on the empirical evidence that the price of any market cap -be it blue chip or not- cannot statistically exceed a maximum exchange rate which depends on the considered time period. Thus, for instance, a market cap is rather unlikely -save for a stock market crash- to exceed 30% within a period of 20 trading sessions. This limitation is equivalent to the walls of the well. Consequently, analysis of the blue chip's historical prices allows us to determine the maximum price fluctuation which may take place in the observed time period with a 95% confidence level, except for stock market innovations and crashes. In this case, a period of 30 days was set, which determined  $\pm 15\%$  in maximum price fluctuation. This means that the walls of the well shall be placed  $\pm 15\%$  from the last price which occupied the central position.

### B. Shaping the bottom of the well

The application of statistical physics methods allows us to estimate function  $V(\mathbf{p})$ , which shall in general show peaks and valleys depending on recent market history. As mentioned previously, the description of this method shall be tackled in a forthcoming paper. Figure 3 shows the potential well and function  $V(\mathbf{p})$  as estimated on October 2nd, 2017. This

function  $V(\mathbf{p})$  gradually changes throughout time. However, it can be considered constant for a period of 20 trading days, save for sudden bursts of innovation.

### C. Solving the Schrödinger equation

Function  $V(\mathbf{p})$  shall be discretized on  $N = 100$  points separated by constant interval  $\Delta = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ . This discretization process and the application of the finite difference method allow us to reduce the Schrödinger equation to a homogeneous system of  $N$  linear algebraic equations which, in short, is a problem of eigenvalues in matrix

$$\begin{pmatrix} v_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & v_2 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & v_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & v_n \end{pmatrix}$$

where  $v_i = 2 + \Delta^2 2\mathbf{b}V(\mathbf{p}_i)/\hbar^2$  can be quickly and easily diagonalized, thus solving the problem. A standard implementation needs only setting up the appropriate ratio conversion factors of price returns to distance in angstrom  $\text{\AA}$  and of total trading volume to energy in electronvolt.

### D. Calculating the elements in the density matrix

The previous section shall have provided us with energy levels  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , as well as with stationary wave functions  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  (see Fig. 4). The temperature calculated from volatility with formula (18) -together with energy levels  $E_1, E_2$ - shall provide us with  $\rho_{1,1}, \rho_{2,2}$  from formulae (10), (11).

### E. Calculating the price probability distribution

Final solution shall be function  $\rho(\mathbf{p})$  calculated from (23) -see Fig. 4.

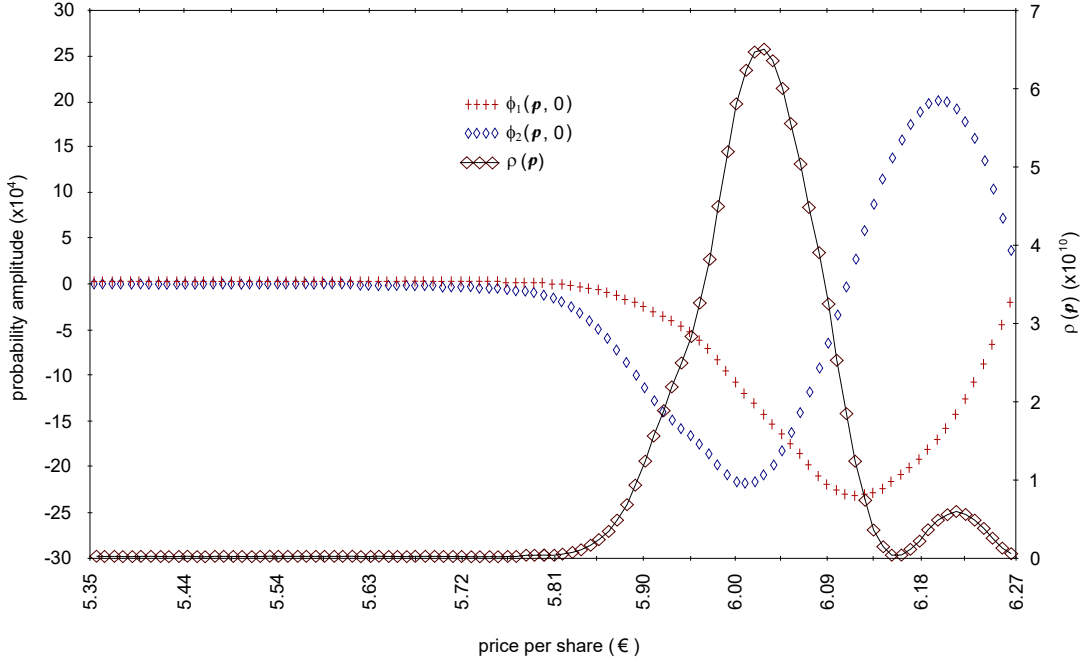


FIG. 4. Wave functions corresponding to both energy levels and probability distribution of the observable *price*

#### IV. CONCLUSIONS

The present paper presents a model to describe financial market dynamics based on the time evolution of a particle placed in a potential field -more precisely, a quantum particle confined in an infinite potential well. Its key features are described next:

- 1) Regarding price fluctuation, the statistical limit existing *de facto* in all markets is considered, instead of the legal-normative level considered in other models, and
- 2) An infinite potential well is considered. Its bottom is not flat but a function of recent market history, instead of the infinite square well, the periodical external field or the harmonic potential considered in other models.

According to our experience, this model proves coherent and capable of explaining certain aspects of financial markets which remain unexplained by models based on classic (Brownian) particles. This model allows obtaining probability distributions of prices for market blue chips, as well as being used with forecasting aims.

## V. INTRODUCCIÓN

Con posterioridad a los modelos entresacados de la Física Estadística para describir la dinámica de los mercados financieros (modelos brownianos, pseudo-Ising, etc[1–3]) ha habido importantes trabajos que involucran la Mecánica Cuántica para explicar aspectos no descritos por los anteriores modelos[4]. Se han propuesto modelos cuánticos que consideran el límite normativo de fluctuación de precios impuesto en algunos mercados, lo cual equivale a considerar como sistema cuántico una partícula dentro de un pozo de potencial infinito o un oscilador armónico con dos valores extremos de potencial[5, 6]. La dificultad de estos modelos reside en la estimación del hamiltoniano del mercado financiero, que depende de factores tan diversos como la coyuntura económica, las políticas económicas, la información del mercado, la psicología de los inversores, etc. Esta es la dificultad que pretendemos superar con el presente modelo.

## VI. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

Asumiremos que la cotización de un stock suficientemente capitalizado (blue-chip) se comporta como una partícula cuántica sin spin encerrada en un pozo de potencial infinito. El fondo del pozo conforma un potencial  $V(\mathbf{p})$  que depende del pasado reciente (ver Fig. 5). La estimación de este potencial  $V(\mathbf{p})$  constituye un problema de Física Estadística al cual dedicaremos un futuro artículo.

La función de onda que describe el estado de la partícula la concebiremos como una función  $\Psi(\mathbf{p}, t)$  que depende de las cotizaciones  $\mathbf{p}$  de las acciones del blue-chip y del tiempo  $t$ . En el espacio de estados[9] y adoptando la notación compacta de Dirac, escribiremos:

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |\phi_n\rangle, \quad (24)$$

Que indica que la función más general  $|\Psi\rangle$  es una superposición lineal de funciones de onda  $|\phi_n\rangle$  estacionarias de energía bien definida, con coeficientes complejos  $c_n = \langle \phi_n | \Psi \rangle$ . El ket  $|\Psi\rangle$  quedaría biunívocamente determinado por el conjunto infinito de los  $c_n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ , siendo esta su "representación-cotizaciones", formalmente análoga a la representación  $\{|\mathbf{r}\rangle\}$

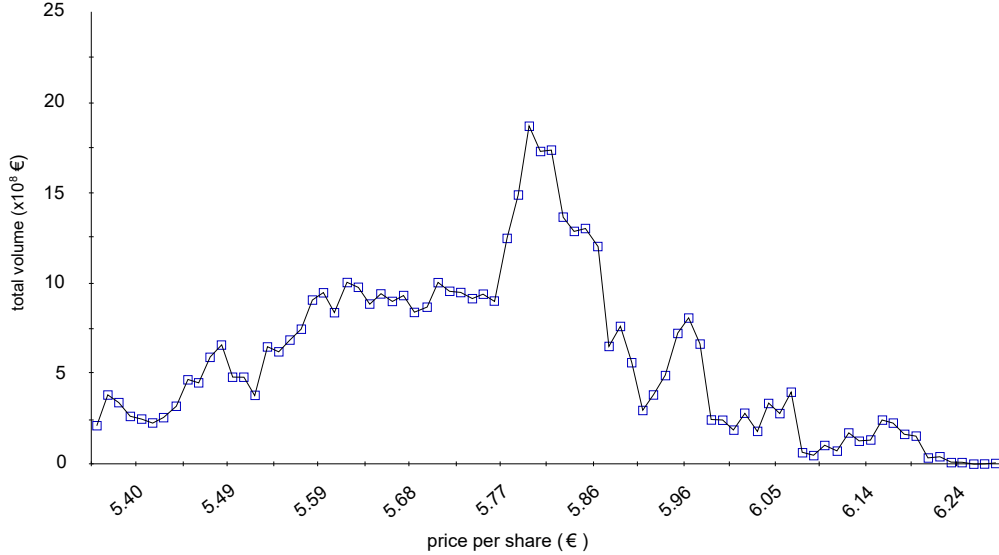


FIG. 5. Campo de potencial al que está sometida la partícula. Se calcula previamente por métodos de Física Estadística

(posiciones) de la Mecánica Cuántica. La distribución de probabilidad de las cotizaciones del blue-chip sería el módulo al cuadrado de la función de onda, es decir,  $|\Psi(\mathbf{p}, t)|^2$ .

### A. Hamiltoniano de un blue-chip en un mercado financiero

En Mecánica Cuántica no hay variables, sino observables, que vienen representados por operadores hermiticos en un espacio de Hilbert (espacio de estados). En un mercado financiero cada operador hermitico estaría representado por un conjunto de variables económicas o financieras. Por tanto, el siguiente paso que daremos será establecer una equivalencia entre conceptos mecano-cuánticos y financieros. Para el pozo de potencial que estamos considerando, el hamiltoniano adopta la forma:

$$H = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + V, \quad (25)$$

El potencial  $V$ , como ya hemos dicho, hay que estimarlo por procedimientos de Física Estadística y, de momento, lo asumiremos conocido. La masa  $m$  de la partícula la asimilaremos al volumen medio de negociación diaria expresado en miles de euros. Si la posición de la partícula la asimilamos a la cotización  $\mathbf{p}$  del blue-chip en un instante  $t$  del tiempo, consecuentemente, el momento lineal  $\mathbf{P}$  se relacionará con la tasa de variación de esa cotización a lo largo del tiempo.

## B. Ecuación de Schrödinger

En esta situación la ecuación de Schrödinger que gobierna la evolución de la partícula sería, en forma compacta:  $H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$ , y explícitamente:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} + V(\mathbf{p})\phi_n = E_n\phi_n, \quad (26)$$

Que es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, donde  $\phi_n$  es la función de onda estacionaria de energía  $E_n$  bien definida. La ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo sería en notación compacta:

$$H|\Psi(\mathbf{p}, t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle, \quad (27)$$

Y explícitamente:

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}^2} \Psi + V(\mathbf{p})\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi, \quad (28)$$

Cuya solución general es

$$\Psi(\mathbf{p}, t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar} t}, \quad (29)$$

Es decir, la solución general  $\Psi(\mathbf{p}, t)$  es una combinación lineal de un número infinito de funciones de onda estacionarias  $\phi_n$ ,  $n = 1, \dots, \infty$ .

## C. Equilibrio termodinámico y valor medio de la energía

Asumiendo que el sistema se encuentre en equilibrio con un baño térmico a temperatura  $T$ , el estado del sistema podría ser descrito por una colectividad estadística de estados estacionarios  $|\phi_n\rangle$  con coeficientes de ponderación proporcionales a  $\exp(-E_n/(KT))$ , donde  $E_n$  es la energía del estado  $|\phi_n\rangle$ ,  $K$  la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura de equilibrio. Tal estado mezcla se puede caracterizar por la matriz densidad, que en este caso se puede escribir como

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H}{KT}}, \quad (30)$$

Donde  $H$  es el operador hamiltoniano y  $Z$  la función de partición canónica, que adopta la forma

$$Z = Tr\{e^{-\frac{H}{KT}}\}, \quad (31)$$

O más explícitamente

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n | e^{-\frac{H}{KT}} | \phi_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{KT}}, \quad (32)$$

Donde los  $E_n$  son los valores propios del hamiltoniano  $H$ . En la correspondiente base  $\{|\phi_n\rangle\}$  de vectores propios los elementos de matriz del operador densidad  $\rho$  se pueden escribir como

$$\rho_{nn} = \frac{1}{Z} \langle \phi_n | e^{-\frac{H}{kT}} | \phi_n \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}}, \quad (33)$$

$$\rho_{nm} = \langle \phi_n | e^{-\frac{H}{kT}} | \phi_m \rangle = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_n}{kT}} \langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0, \quad (34)$$

Las anteriores relaciones (33), (34) significan que, en equilibrio termodinámico, las poblaciones de estados propios son exponencialmente decrecientes con la energía y que las coherencias  $\rho_{nm}$  entre estados propios son cero.

### 1. Aproximación de sistema cuántico de dos niveles

Usando la matriz de densidad  $\rho$  se puede calcular el valor medio  $\langle H \rangle$  :

$$\langle H \rangle = Tr(H\rho) = \frac{1}{Z} Tr(H e^{-\frac{H}{kT}}), \quad (35)$$

Expandiendo esta expresión en la base de vectores propios  $\{\phi_n\}$  tenemos:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=1}^{\infty} E_n e^{-\frac{E_n}{kT}}, \quad (36)$$

En este punto vamos a introducir una importante simplificación: en base a datos empíricos, asumiremos que, para la partícula cuántica, solo son alcanzables el estado fundamental y el primer excitado, debido a que el segundo excitado y siguientes requieren niveles de energía crecientes e inalcanzables para la partícula. Es decir, reducimos el problema a un sistema cuántico de dos estados (fundamental y primer excitado). Esta asunción está basada en el hecho de que un mercado bursátil puede pasar súbitamente de baja a alta volatilidad para, posteriormente, retornar a su estado anterior de baja volatilidad. Este hecho, hasta ahora, no ha sido explicado, sino solamente simulado por modelos "ad hoc". Para tal sistema de dos niveles la ecuación general (36) da como resultado:

$$\langle H \rangle = \frac{E_1 e^{-\frac{E_1}{kT}} + E_2 e^{-\frac{E_2}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}} + e^{-\frac{E_2}{kT}}}, \quad (37)$$

Siendo  $E_1$ ,  $E_2$  los niveles de energía bien definidos,  $K$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta. La grafica en función de  $T$  puede verse en Fig. 6, en la cual se aprecia que cuando la temperatura  $T$  tiende a cero,  $\langle H \rangle$  tiende a  $E_1$  y cuando  $T$  crece hasta valores altos,  $\langle H \rangle$  tiende asintóticamente a  $(E_1 + E_2)/2$

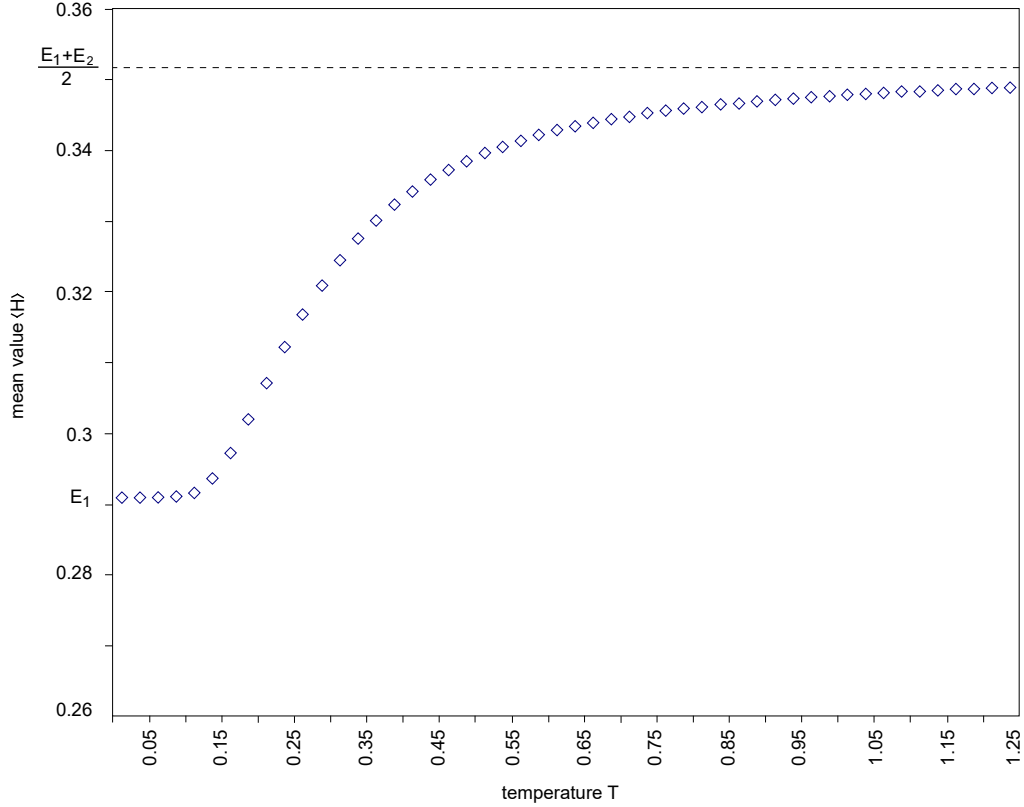


FIG. 6. Valor medio del hamiltoniano  $\langle H \rangle$  versus temperatura absoluta  $T$  para un sistema cuantico de dos niveles  $E_1, E_2$

El significado de Fig. 6 es fácil de entender: para  $T = 0$  el sistema se encuentra en su estado fundamental  $|\Psi_1\rangle$  de energía  $E_1$ ; a altas temperaturas la mezcla estadística está formada por ambos niveles  $E_1, E_2$  a partes iguales, y el promedio  $\langle H \rangle$  se aproxima a la semisuma de  $E_1$  y  $E_2$ . Aplicando las fórmulas (33), (34) obtenemos los elementos de la matriz densidad para el sistema de dos niveles de energía:

$$\rho_{1,1} = \dots = \frac{e^{-\frac{E_1}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}} + e^{-\frac{E_2}{kT}}}, \quad \rho_{1,2} = \rho_{2,1} = 0 \quad (38)$$

$$\rho_{2,2} = \dots = \frac{e^{-\frac{E_2}{kT}}}{e^{-\frac{E_1}{kT}} + e^{-\frac{E_2}{kT}}}$$

#### D. Temperatura del mercado

Asumiendo que los precios  $\mathbf{p}$ , las tasas de cambio de precio (retornos)  $\boldsymbol{\tau}$  y los volúmenes de negociación  $\mathbf{v}$  jueguen los papeles de posición, velocidad y masa de partícula, respectiva-



mente, el Principio de incertidumbre podría expresarse como:

$$\Delta \mathbf{p} \Delta(\mathbf{v}\mathbf{r}) \geq \hbar/2, \quad (39)$$

Siendo formalmente  $\mathbf{v}\mathbf{r} = \text{momentum}$  y  $\mathbf{r} = d\mathbf{p}/dt$ . La energía cinética  $E_k$  promediada a lo largo del tiempo sería:

$$\langle E_k \rangle = \left\langle \frac{(\mathbf{v}\mathbf{r})^2}{2\mathbf{v}} \right\rangle = \frac{1}{2}KT, \quad (40)$$

Donde  $K$  es la constante de Boltzmann. Consecuentemente, una coherente definición de temperatura sería:

$$T = \frac{\langle \mathbf{v}\mathbf{r}^2 \rangle}{K}, \quad (41)$$

Para una discusión más amplia del concepto de temperatura del mercado, véase[8].

### E. Distribución de probabilidad del observable "precio"

Ahora busquemos la probabilidad  $\rho(\mathbf{p})d\mathbf{p}$  de encontrar la partícula en una posición  $\mathbf{p}$  situada entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$ . Cuando la partícula esté en el estado estacionario  $|\phi_n\rangle$  la correspondiente densidad de probabilidad  $\rho_n(\mathbf{p})$  será:

$$\rho_n(\mathbf{p}) = |\phi_n(\mathbf{p})|^2 = \langle \mathbf{p} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \mathbf{p} \rangle, \quad (42)$$

En el equilibrio termodinámico, el estado de la partícula está descrito por una colectividad estadística de estados  $|\phi_n\rangle$  con coeficientes de ponderación  $(1/Z) \exp(-E_n/(KT))$ . Por tanto, la densidad de probabilidad en este caso será:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \sum_n \rho_n(\mathbf{p}) e^{-\frac{E_n}{KT}}, \quad (43)$$

es decir, podemos definir la densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{p})$  como la suma ponderada de las densidades  $\rho_n(\mathbf{p})$  correspondientes a los diversos estados  $|\phi_n\rangle$ . Veamos cómo se relaciona la densidad de probabilidad definida en (43) con la matriz de densidad  $\rho$ . Combinando (43) y (42) tenemos:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \sum_n \rho_n(\mathbf{p}) e^{-\frac{E_n}{KT}} \langle \mathbf{p} | \phi_n \rangle \langle \phi_n | \mathbf{p} \rangle, \quad (44)$$

Teniendo en cuenta la relación de clausura para los estados  $|\phi_n\rangle$ , el operador  $\exp(-H/(KT))$  puede ser reescrito del modo siguiente:

$$e^{-\frac{H}{KT}} = e^{-\frac{H}{KT}} \sum_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n| = \sum_n e^{-\frac{E_n}{KT}} |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (45)$$

Combinando (44) y (45) tenemos que:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{Z} \langle \mathbf{p} | e^{\frac{-H}{kT}} | \mathbf{p} \rangle = \langle \mathbf{p} | \rho | \mathbf{p} \rangle, \quad (46)$$

De este modo, se puede interpretar que  $\rho(\mathbf{p})$  es el elemento diagonal de  $\rho$  correspondiente al ket  $|\mathbf{p}\rangle$ .

## VII. UN EJEMPLO PRÁCTICO DESCRITO PASO A PASO

A continuación, calcularemos la distribución de probabilidad de precios de un blue-chip perteneciente al selectivo español IBEX 35. Los pasos a seguir se describen a continuación.

### A. Fijando las condiciones de contorno

Lo primero de todo, fijamos el periodo de tiempo durante el cual queremos que sea válido el resultado (distribución de probabilidad) que obtengamos. Las paredes del pozo determinan un potencial infinito, es decir, la partícula cuántica no puede escapar del pozo en el que se encuentra confinada. Esta asunción se basa en la evidencia empírica de que la cotización de cualquier valor bursátil, sea blue-chip o no, no puede superar estadísticamente una tasa de cambio máxima que depende del periodo de tiempo considerado. Así, por ejemplo, es muy improbable, salvo crash bursátil, que un stock oscile por encima del 30% dentro de un período de veinte sesiones de negociación. Esta limitación es la que equivale a las paredes del pozo. Consecuentemente, analizando las cotizaciones históricas del blue chip, determinamos la máxima fluctuación de precios que podría producirse en el periodo de tiempo fijado, con un 95% de confianza, salvo procesos de innovación y crash bursátil. En el ejemplo que nos ocupa, se fijaron 30 días como periodo de tiempo, lo que determinó  $\pm 15\%$  de fluctuación máxima de precios. Lo que implica que las paredes del pozo estarán situadas a  $\pm 15\%$  de la última cotización que ocupará la posición central.

### B. Conformando el fondo del pozo

Aplicando métodos de la Física Estadística estimamos la función  $V(\mathbf{p})$  que tendrá en general "montañas" y "valles" que dependerán de la historia reciente del mercado. Como ya señalamos anteriormente, la descripción de este método será objeto de un próximo artículo.

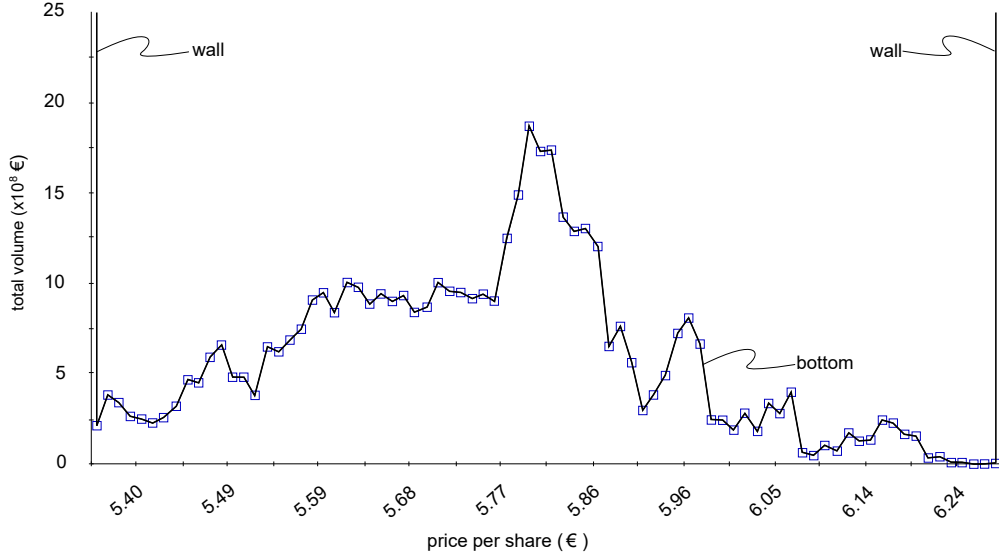


FIG. 7. El campo de potencial, a priori calculado, conforma el fondo del pozo de potencial en el que está confinada la partícula cuántica

En la Fig. 7 puede verse el pozo de potencial y la función  $V(\mathbf{p})$  tal como era estimada a fecha 2 de octubre del 2017. Esta función  $V(\mathbf{p})$  cambia paulatinamente a lo largo del tiempo, pero para un periodo de unas veinte sesiones de negociación bursátil puede considerarse constante, salvo abruptos procesos de innovación.

### C. Resolviendo la ecuación de Schrödinger

Discretizamos la función  $V(\mathbf{p})$  en unos  $N = 100$  puntos separados por un intervalo constante  $\Delta = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ . Con esta discretización y aplicando el método de diferencias finitas, la ecuación de Schrödinger queda reducida a un sistema lineal homogéneo de  $N$  ecuaciones algebraicas que en definitiva es un problema de autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} v_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & v_2 & -1 & & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & v_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & v_n \end{pmatrix}$$

donde  $v_i = 2 + \Delta^2 2\mathbf{v}V(\mathbf{p}_i)/\hbar^2$ , la cual se puede diagonalizar fácil y rápidamente, quedando el problema resuelto. Se puede usar una implementación standard sin más que establecer

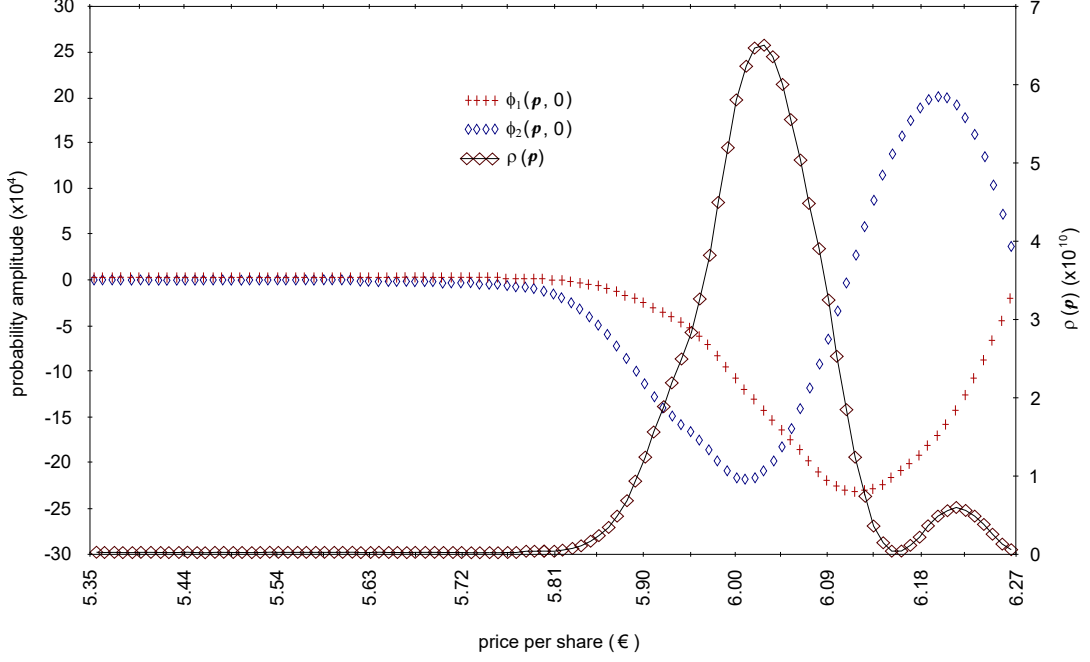


FIG. 8. Funciones de onda de los dos niveles de energía y distribución de probabilidad del observable "precio"

los apropiados factores de conversión de ratio de retorno de precios a distancia en amstrong y de volumen total de negociación a energía en electron-voltio.

#### D. Calculando los elementos de la matriz densidad

El apartado anterior nos habrá proporcionado los niveles de energía  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , así como las funciones de onda estacionarias  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$  (ver Fig. 8). La temperatura calculada a partir de la volatilidad por la fórmula (41), junto con los niveles de energía  $E_1, E_2$ , nos proporcionará  $\rho_{1,1}, \rho_{2,2}$  a partir de las fórmulas (33), (34).

#### E. Calculando la distribución de probabilidad de precios

La solución final será la función  $\rho(\mathbf{p})$  calculada a partir de (46). Véase Fig. 8.

## VIII. CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado un modelo para la descripción de la dinámica de mercados financieros, basado en la evolución temporal de una partícula sometida a un campo de potencial. Más concretamente, hemos usado una partícula cuántica encerrada en un pozo de potencial infinito, cuyas características clave son las siguientes:

- Respecto a la fluctuación de precios, se considera el límite estadístico que existe de facto en todos los mercados, en lugar del límite legal normativo considerado por otros modelos.
- Se considera un pozo infinito de potencial, cuyo fondo no es plano sino función de la historia reciente del mercado, en lugar del pozo cuadrado infinito, campo externo periódico o potencial armónico de otros modelos.

Por nuestra experiencia y hasta el momento, el modelo se muestra coherente y capaz de explicar aspectos de los mercados financieros hasta ahora inexplicados por los modelos basados en partículas clásicas (brownianas). Mediante este modelo pueden obtenerse distribuciones de probabilidad de precios para los blue-chips del mercado y usarse con fines predictivos.

- 
- [1] M. G. Daniels, J. D. Farmer, L. Gillemot, G. Iori, and E. Smith, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 108102 (2003).
- [2] T. Kaizoji, S. Bornholdt, and Y. Fujiwara, *Physica(Amsterdam)* **316A**, 441 (2002).
- [3] D. Chowdhury and D. Stauffer, *Eur. Phys. J. B* **8**, 477 (1999).
- [4] O. Racorean, “Quantum tunneling of stock price in range bound market conditions,” e-print arXiv:q-fin.PR/1307.6727 (2013).
- [5] C. Zhang and L. Huang, *Physica A* **389**, 5769 (2010).
- [6] X. Meng, J. Zhang, J. Xu, and H. Guo, *Physica A* **438**, 154 (2015).
- [7] Hilbert space of wave functions.
- [8] J. L. Subias, “Negative kelvin temperatures in stock markets,” e-print arXiv:q-fin.ST/1206.1272 (2013).
- [9] Espacio de Hilbert de las funciones de onda.